Local contractibility of groups of uniform homeomorphisms (Research Trends on Set-theoretic and Geometric Topology and their Prospect)

矢ヶ崎, 達彦

数理解析研究所講究録
第 1987 巻 2016 年 43-48

Local contractibility of groups of uniform homeomorphisms

京都工芸繊維大学 基盤科学系 数学　矢ヶ崎 達彦
Tatsuhiko Yagasaki
Graduate School of Science and Technology
Kyoto Institute of Technology

1. 非コンパクト多様体の同相群の位相について

n 次元位相多様体 M の同相群 $\mathcal{H}(M)$ の典型的な位相 τ として，Whitney 位相 w，一様位相 u，コンパクト・開位相 co が挙られる．多様体 M がコンパクトの場合，これらの位相は一致し，この位相 τ の下で 同相群 $\mathcal{H}(M)_\tau$ は位相群となり，局所可縮となる [5]．さらに $n=1,2$ の場合には 位相的 ℓ_2 多様体となり [8]，そのホモトピー型・位相型も知られている [6]．$n \geq 3$ の場合に $\mathcal{H}(M)_\tau$ が 位相的 ℓ_2 多様体になるかどうかは，同相群予想として以前未解決な古典的難問となっている．一方，多様体 M が非コンパクトの場合には，状況は一変し，これら 3 つの位相は，各々まったく異なる特性を持っている．

(1) 最も強い位相である Whitney 位相 w は，エンドでの位相が強過ぎ，位相群 $\mathcal{H}(M)_w$ は位相空間としてあまり良い性質を持たない．例えば，$n=1,2$ の場合，$\mathcal{H}(M)_w$ は ℓ_2 の可算箱積 $\square^\omega \ell_2$ (i.e., 箱位相をもつ ℓ_2 の可算積) と局所同相であることがわかっている [1]．一方，$\mathcal{H}(M)_w$ の重要な正規部分群である コンパクト台をもつ同相写像全体からなる部分群 $\mathcal{H}_c(M)_w$ は，任意の次元 n に対して 可分 パラコンパクト，距離化不可能 かつ 局所可縮であり，$n=1,2$ の場合には ℓ_2 の可算小箱積 $\boxdot^\omega \ell_2$ と局所同相になることが知られている [1]．この結果は，同相群予想が肯定的に解決されれば，$n \geq 3$ の場合に拡張されることが期待される．位相 w が強過ぎるため，$\mathcal{H}(M)_w$ の単位連結成分 $\mathcal{H}(M)_{w,0}$ は，部分群 $\mathcal{H}_c(M)_w$ の単位連結成分 $\mathcal{H}_c(M)_{w,0}$ と一致してしまう．この単位連結成分の大域的な位相型に関して，$n=1,2$ の場合に，$\mathcal{H}(M)_{w,0} = \mathcal{H}_c(M)_{w,0}$ が $\boxdot^\omega \ell_2$ と同相になることが知られている [2]．

(2) これに対して，最も弱い位相である コンパクト・開位相 co では，その位相の定義からエンド近傍で位相的制限がほとんど課されないため，位相として少し弱すぎるように思われる．実際，位相群 $\mathcal{H}(M)_{co}$ は可分で距離化可能となるが，一般に局所連結とはならない．特に，$n=1,2$ の場合には，単位連結成分 $\mathcal{H}(M)_{co,0}$ や $\mathcal{H}_c(M)_{co,0}$ の ホモトピー型・位相型 が分類されている．すなわち，$\mathcal{H}(M)_{co,0}$ は 位相的 ℓ_2 多様体となり，回転を許容する平面・開アニュラス，半開アニュラス・開メービウス帯 の例外的な場合は $\mathbb{S}^1 \times \ell_2$ と，それ以外の場合は ℓ_2 と それぞれ同相になる [12]．さらに，部分群 $\mathcal{H}_c(M)_{co,0}$ から $\mathcal{H}(M)_{co,0}$ への包含写像はホモトピー同値となる [13]．従って，回転を持つ 4 つの例外的な場合には，

$\mathcal{H}_c(M)_{co,0}$ の中にも，回転に対応する本質的なループが存在することになる．このことは直感的なイメージからずれているように感じるであろう．このループの構成は [13] に明確に記されている．このコンパクト台に関する結果は，コンパクト・開位相 co の下で，エンド近傍において同相写像をいくら大きく変形しても，位相的には小さな変形でしかないという 位相 co の定義自身に起因しており，ある意味で 位相 co の欠点を表している．

(3) 一様位相 u は，これら２つの位相の中間に位置する位相である．位相 u は，多様体 M 上に与えられた距離 d から定まる $\mathcal{H}(M)$ 上の 上限距離 から定まる位相であり，距離 d に明確に依存している．また，同相群 $\mathcal{H}(M)_u$ 自身は 位相 u の下で位相群とはならない．従って，位相群の範疇で考察するためには，距離多様体 (M,d) の一様同相全体の成す部分群 $\mathcal{H}^u(M,d)$ に一様位相 u を入れて考える必要がある．この位相群 $\mathcal{H}^u(M,d)_u$ の位相的性質に関連する文献としては，J. M. Kister [7]，A.V. Černavskiĭ [4]，T.B. Rushing [10, Section 5.6] 及び [9] 等が挙られるが，散逸的なものであり，他の位相 w や co に比べその性質の解明は遅れていた．このような状況の下で，筆者は，[14, 15] において $\mathcal{H}^u(M,d)_u$ の体系的な研究を目指した．この論説は，これらの論文により得られた結果の概略・意味合いの紹介を目的としている．このため，ここでは概念的な説明に主点をおいた．形式的な議論の詳細は論文 [14, 15] を直接参照して頂きたい．

2. 距離多様体の一様同相群の一様位相について

R. D. Edwards - R. C. Kirby によりコンパクト多様体の同相群が局所可縮であることが示されている．この基礎になっているのが，彼らによる位相多様体におけるコンパクト部分空間の近傍の埋め込みに関する変形定理である [5, Theorem 5.1]．筆者は，まず [14] において，この定理からコンパクト距離多様体の距離被覆空間 (M,d) における任意の部分空間 X の一様近傍 U の M への一様埋め込みに関する変形定理を導いた．この結果から，この距離多様体のクラスに対して 位相群 $\mathcal{H}^u(M,d)_u$ の局所可縮性が得られるが，さらに広いクラスを扱うために，筆者は [15] において，一般の距離多様体 (M,d) 及び その部分空間に対して，上記の一様埋め込みの変形定理に現れる一様埋め込みの族の変形の存在自体を一様埋め込みの局所変形性 (LD) として定式化し，その基本的な性質を考察した．その中でも，性質 LD の有限加法性は非常に有用であり，これにより距離多様体をより簡単な部分多様体に分割して考えることが出来る様になる．例えば，コンパクト距離多様体の距離被覆空間が性質 LD を持つことから，LD の加法性を用いて，可算離散群の幾何的作用を持つ距離多様体も 性質 LD を持つことがわかる．また，距離多様体においてコンパクト部分空間は常に性質 LD を持つから，加法性により性質 LD は，距離多様体のエンド近傍の性質になることがわかる．従って，次のステップとして典型的な 距離エンド が性質 LD を持つかどうかが問題となる．そこで [15] では，典型的な 距離エンド として，コンパクト リプシッツ多様体 (N,d) 上の κ 錐 $C_\kappa(N,d)$ $(\kappa \le 0)$ を考察し，これが 性質 LD を持つことを示している．

応用を考えた際，位相群 $\mathcal{H}^u(M,d)_u$ の局所的な性質よりも，大域的なホモトピー型の方がより重要になる．κ 錐 $C_\kappa(N,d)$ は，錐としてスカラー倍による拡大・縮小の作用をもつ．特に $\kappa=0$ の場合には，このスカラー倍が一様同相になり，局所変形性 LD からエンド近傍の有界一様埋め込みのより小さい適当なエンド近傍での恒等写像への変形性が導かれる．[15] では，さらに一般の位相的に積の形の適正距離エンドにおける一様埋め込みのエンド変形性 (ED) を定式化し，次の定理を得た．もし距離多様体 (M,d) が有限個の ED 性を持つエンドを持てば，M の任意のエンド近傍の M への有界な一様埋め込みの族は，ある適当なエンド近傍上で恒等写像になっている部分族への強変形レトラクトを持つ．特に，(M,d) の 有界一様同相の成す部分群 $\mathcal{H}^u_b(M,d)_u$ は，M の適当なエンド近傍上恒等写像になっている有界一様同相の成す部分群への強変形レトラクトを持つ．これから，例えば，標準距離を持つユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ に対して，$\mathcal{H}^u_b(\mathbb{R}^n)_u$ は可縮となることがわかる．ここで，$\mathcal{H}^u_b(\mathbb{R}^n)_u$ の可縮性と Alexander イソトピー [7] との関係を明らかにしておく必要がある．このために，次節で 非コンパクト多様体の同相群の (局所) 可縮性の概念に関する歴史的背景から振り返ることにする．

3. 同相群の局所可縮性について

一般に，位相群 G の局所可縮性は，G の単位元 e のある近傍 U の G の中での一点への連続的な変形可能性と同値である．後者の条件は，いわゆる写像空間の指数法則により，次の様に言い換えることが出来る：e のある近傍 U の各点 p に G における p から e への連続な路を連続的に対応させることが出来る．但し，連続な路の空間には，コンパクト・開位相を与える．

同相群の場合，位相多様体 M に対して，$\mathcal{H}(M)_w, \mathcal{H}(M)_{co}$ は位相群になり，$\mathcal{H}(M)_{co}$ における連続な路はイソトピーに対応している．同相群の局所可縮性に関する古典的な結果は，Edwards - Kirby の位相的埋め込みの変形定理 [5] から導かれる．多様体 M がコンパクトの場合，位相 $\tau=w=u=co$ に対して，同相群 $\mathcal{H}(M)_\tau$ は局所可縮になる．言い換えれば，id_M のある近傍 $\mathcal{U}$ の各元 h に対し h から id_M へのイソトピーの連続的な選択が存在する．但し，イソトピーの空間にも位相 τ を入れる．多様体が非コンパクトの場合，$\mathcal{H}(M)_w$ は，位相空間として局所可縮にはなり得ないが，Edwards - Kirby の変形定理から次の帰結が得られる：$\mathcal{H}(M)_w$ における id_M のある近傍 $\mathcal{U}$ の各元 h に対し h から id_M へのイソトピーの連続的な選択が存在する [5]．但し，イソトピーの空間にも位相 w を入れる．これは，一見，$\mathcal{H}(M)_w$ の局所可縮性を意味する様に思われるかもしれないが，実際には，$\mathcal{H}(M)_w$ の局所可縮性よりも弱い条件となっている．M が非コンパクトのとき，$\mathcal{H}(M)_w$ が位相空間として決して局所可縮にならない以上，これより良い結論は得られない．また，M がコンパクトのときは，これは $\mathcal{H}(M)_\tau$ の局所可縮性と同値な条件となっている．そこで，[5] では，このイソトピーの連続的な選択の主張をもって多様体の同相群の

局所可縮性と解釈している．すなわち，同相群に関しては，通常の位相的な概念を同相群の特性に合わせて少し変更して適応しようとする訳である．

同相群に限らず，微分同相群，PL 同相群 等において，通常の位相的な概念を同相群の特性に合わせて適宜変更して適応しようとする考え方は，むしろ幾何的位相幾何の分野においては標準的なものと言える．例えば，PL 多様体の PL 同相群を考える際，PL 構造を反映する PL 同相群上の適当な位相は見当たらない．従って，PL 同相群の準単体腹帯近似を考える際，1-単体 (路) を PL イソトピーと解釈することは自然であり，かつ，有効である．高次元単体についても同様である．この準単体腹帯近似に関して理論を展開した後で，例えば，PL 同相群に位相 co を入れたときの位相的性質と比較することは，その後の問題となり，実際，両者は，著しく異なる特性をもつことになる．

同相群の位相の考察に戻って，Edwards - Kirby による同相群の w 位相の下での局所可縮性の解釈・定理を拡張して，T.B. Rushing [10, Section 5.6] では，一般の位相 τ に関しても同様の定式化を行っている．すなわち，多様体 M の同相群 $\mathcal{H}(M)_\tau$ の部分群 $\mathcal{G}_\tau$ が局所可縮 であると言うことを，M 上のイソトピーの空間にも同種の位相 τ を入れた上で，$\mathcal{G}_\tau$ における id_M のある近傍 $\mathcal{U}$ の各元 h に対し h から id_M へのイソトピー $h_t \in \mathcal{G}_\tau$ $(t \in [0,1])$ の連続的な選択の存在をもって定義するわけである．さらに，もし $\mathcal{U}$ が 全体 $\mathcal{G}_\tau$ にとれれば，$\mathcal{G}_\tau$ は 可縮であると定義する．

この定義は，もちろん一様位相に関しても適用され，従って，例えば，位相群 $\mathcal{H}^u_b(\mathbb{R}^n)_u$ に関して，その (局所) 可縮性は，位相空間としての通常の意味と Rushing の意味の 2 通りの解釈が存在することになる．では，この 2 つの概念はどのような関係にあるだろうか．結論から言うと，Rushing の意味の局所可縮性は，位相空間としての通常の意味の局所可縮性よりも弱い条件になり，Alexander トリックを用いて構成される $\mathcal{H}^u_b(\mathbb{R}^n)_u$ を 1 点に潰す変形写像は，Rushing の意味で 1 点に潰す変形写像を与えるが，位相空間としての通常の意味での 一様位相に関して連続な 1 点に潰す変形写像を定めないことがわかる．一方，前節で述べた $\mathcal{H}^u_b(\mathbb{R}^n)_u$ が可縮という結果は，位相空間としての通常の意味での主張である．以下で，このことについてさらに詳しく説明する [15]．

一様位相に関する連続性を考える際，一様イソトピーの概念が重要になる．距離空間 (X,d) に対して，空間 $X \times [0,1]$ 上には，X 上の距離 d と $[0,1]$ 上の標準的な距離から自然な距離 $\tilde{d}$ が定まる．(X,d) 上のイソトピー $(h_t)_{t\in[0,1]}$ は，$X \times [0,1]$ 上の同相写像として距離 $\tilde{d}$ に関して一様同相になっているとき，一様イソトピーであると言う．一方，単に各レベル h_t が (X,d) 上の (有界) 一様同相となっている場合には，$(h_t)_t$ を レベル毎の (有界) 一様イソトピーと呼ぶことにする．重要な考察は，$\mathcal{H}^u(X,d)_u$ における連続な路は，正確に (X,d) 上の一様イソトピーに対応するということである．

J. M. Kister [7] は，$\mathbb{R}^n$ 上の任意の有界同相写像 h に対して，スカラー倍による縮小変換との共役をとることにより 恒等写像 から h へのイソトピー $(h_t)_t$ を構成している．具体的な定義式は 次で与えられる：　$h_t(x) = th(x/t)$　$(x \in \mathbb{R}^n, t \in (0,1])$,　$h_0 = \mathrm{id}$.

この所謂 Alexander トリックを用いて $\mathcal{H}_b^u(\mathbb{R}^n)_u$ を 1 点に潰す変形写像が構成されることが期待される．確かに，この Alexander イソトピー $(h_t)_t$ は，レベル毎の 有界一様イソトピーになり，さらに，対応 $h \mapsto (h_t)_t$ は，$\mathcal{H}_b^u(\mathbb{R}^n)_u$ の Rushing の意味での 1 点に潰す変形写像を与えている．しかし，Alexander イソトピー $(h_t)_t$ は必ずしも一様イソトピーにはならず，したがって，対応 $(h,t) \mapsto h_t$ は $\mathcal{H}_b^u(\mathbb{R}^n)_u$ を 1 点に潰す連続な変形写像を定めない．この具体例は，次の様に容易に構成される．

例. 任意のベクトル $v \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ に対して，$h \in \mathcal{H}_b^u(\mathbb{R}^n)$ で次の 2 条件を満たすものが構成できる: (i) $h((2k+1)v) = (2k+1)v$ $({}^\forall k \in \mathbb{N})$,
(ii) ある $c > 0$ が存在して $d(h(2kv), 2kv) > c$ $({}^\forall k \in \mathbb{N})$.

このような h に対して，写像 $\eta_h : [0,1] \ni t \mapsto h_t \in \mathcal{H}_b^u(\mathbb{R}^n)$ は $t=1$ で連続にならない.

証明. もし η_h が $t=1$ において連続であれば，ある $t_0 \in [0,1)$ が存在して

$$d(h_t, h) < c \quad ({}^\forall t \in (t_0, 1])$$

となる．ここで, d は $\mathbb{R}^n$ の標準距離 及び この距離に関する 写像の上限距離を表す.

$\dfrac{2k}{2k+1} \to 1$ $(k \to \infty)$ だから，ある $k \in \mathbb{N}$ が存在して $t := \dfrac{2k}{2k+1} > t_0$ となる．すると，

$$h_t(2kv) = th(2kv/t) = th((2k+1)v) = t(2k+1)v = 2kv$$
$$\therefore\ d(h_t, h) \geq d(h_t(2kv), h(2kv)) = d(2kv, h(2kv)) > c.$$

これは $d(h_t, h) < c$ に矛盾する. □

対応 $(h,t) \mapsto h_t$ は $\mathcal{H}_b^u(\mathbb{R}^n)_u$ 上では連続にならないが，適当な部分群上では連続になる可能性が残されている．最後に，この点に関して説明する．まず，Alexander トリックは，もっと一般に コンパクト距離空間 (X,d) 上の κ 錐 $C_\kappa(X,d)$ $(\kappa \leq 0)$ 上で定義されることに注意する．但し，スカラー倍による縮小・拡大変換は $\kappa = 0$ の場合は一様同相になるので，h が 一様同相ならば各 h_t も一様同相になるが，$\kappa < 0$ の場合は，スカラー倍による縮小・拡大変換は一般に一様同相にならず，h が一様同相でも h_t は一様同相になるとは限らないので注意が必要である.

命題. 写像 $\varphi : \mathcal{H}_b^u(C_\kappa(X,d))_u \times [0,1] \longrightarrow \mathcal{H}_b(C_\kappa(X,d))_u :\ \varphi(h,t) = h_t$ は，位相群 $\mathcal{H}_b^u(C_\kappa(X,d))_u$ の次の部分群のそれぞれを 1 点に潰す連続な変形写像を定める:

$$\mathcal{G}(C_\kappa(X,d))_u > \mathcal{H}_0(C_\kappa(X,d))_u > \mathcal{H}_c(C_\kappa(X,d))_u$$

ここで，$\mathcal{G}(C_\kappa(X,d))_u := \{h \in \mathcal{H}_b^u(C_\kappa(X,d))_u \mid (h_t)_t$ は一様イソトピー$\}$ であり，$\mathcal{H}_0(C_\kappa(X,d))_u$ は，$C_\kappa(X,d)$ 上で エンドに向けて id に漸近する同相写像全体 の成す部分群を表す.

最後に，今後の課題としては，双曲的 $(\kappa < 0)$ なエンドでの一様同相の変形性の研究や一様微分同相写像の群の研究が挙げられる.

References

[1] T. Banakh, K. Mine, K. Sakai, T. Yagasaki, *Homeomorphism and diffeomorphism groups of non-compact manifolds with the Whitney topology*, Topology Proc. 37 (2011) 61–93.

[2] ———, *On homeomorphism groups of non-compact surfaces, endowed with the Whitney topology*, Topol. Appl. 164 (2014) 170–181.

[3] M.R. Bridson and A. Haefliger, Metric spaces of non-positive curvature, GMW 319, Springer-Verlag, Berlin, 1999.

[4] A.V. Černavskiĭ, *Local contractibility of the group of homeomorphisms of a manifold*, (Russian) Mat. Sb. (N.S.) 79 (121) (1969) 307–356.

[5] R.D. Edwards and R.C. Kirby, *Deformations of spaces of imbeddings*, Ann. of Math. (2) **93** (1971) 63–88.

[6] M.E. Hamstrom, *Homotopy groups of the space of homeomorphisms on a 2-manifold*, Illinois J. Math. 10 (1966) 563-573.

[7] J.M. Kister, *Small isotopies in Euclidean spaces and 3-manifolds*, Bull. Amer. Math. Soc. **65** (1959) 371–373.

[8] R. Luke, W.K. Mason, *The space of homeomorphisms on a compact two-manifold is an absolute neighborhood retract*, Trans. Amer. Math. Soc. 164 (1972) 275–285.

[9] K. Mine, K. Sakai, T. Yagasaki and A. Yamashita, *Topological type of the group of uniform homeomorphisms of the real lines*, Topology Appl., 158 (2011) 572 - 581.

[10] T.B. Rushing, Topological embeddings, Academic Press, New York, 1973.

[11] T. Yagasaki, *Spaces of embeddings of compact polyhedra into 2-manifolds*, Topology Appl., 108 (2000) 107–122.

[12] T. Yagasaki, *Homotopy types of homeomorphism groups of noncompact 2-manifolds*, Topology Appl., 108 (2000) 123–136.

[13] ———, *The groups of PL and Lipschitz homeomorphisms of noncompact 2-manifolds*, Bulletin of the Polish Academy of Sciences, Mathematics, 51 (2003) 445–466.

[14] ———, *Groups of uniform homeomorphisms of covering spaces*, J. Math. Soc. Japan, 66 (2014) 1227–1248.

[15] ———, *Local and end deformation theorems for uniform embeddings, preprint*, (arXiv:1301.3265v3).

Faculty of Arts and Sciences,
Kyoto Institute of Technology,
Kyoto, 606-8585, Japan
E-mail address: yagasaki@kit.ac.jp